

# Feldlinienbilder: nur die halbe Wahrheit!

H. Hauptmann, F. Herrmann

Abteilung für Didaktik der Physik, Universität, 76128 Karlsruhe

## Einleitung

Ein Feldlinienbild ist wohl die am häufigsten benutzte Methode zur Darstellung von elektrischen und magnetischen Feldern. Dies hat mehrere Ursachen. Unter anderem kann man sie mit wenigen Strichen skizzieren. Dabei liefern sie dem Betrachter schnell wesentliche Informationen über den betrachteten Gegenstand:

- Man erhält einen schnellen Überblick über die Richtung des Feldstärkevektors an jedem Ort.
- Sie zeigen auf einen Blick die Ladungsverteilung, d. h. die Stellen an denen die Divergenz der Feldstärke von null verschieden ist. An diesen Stellen beginnen oder enden die Feldlinien, Abb. 1a.

Wir schlagen vor, außer den Feldlinien stets auch die dazu orthogonalen Flächen zu zeichnen, Abb. 1b. Das ist kein großer zusätzlicher Aufwand, erweist sich aber als sehr nützlich. Wir möchten diese Orthogonalflächen „Feldflächen“ nennen. Sie erscheinen im 2-dimensionalen Schnitt auch wieder als Linien. Die Feldflächen sind in Abb. 1b und im folgenden rot, die Feldflächen grün dargestellt.

Bei elektrostatischen Feldern zeichnet man die Feldflächen manchmal ein, und nennt sie dann Äquipotenzialflächen. Besonders nützlich sind die Feldflächen aber bei nicht-statischen Feldern (also Wirbelfeldern). Auch wenn man in Wirbelfeldern kein Potenzial definieren kann, darf und kann man dort selbstverständlich die Orthogonalflächen zeichnen. Man kann nur den einzelnen Feldflächen keinen Potenzialwert mehr zuordnen.

Die Idee, auch die Feldflächen zu zeichnen, ist nicht neu. Bereits Maxwell zeichnete in allen seinen Feldd Bildern die Feldlinien und die Feldflächen ein, Abb. 2. Zu Maxwell's Zeiten nannte man sie „Kraftlinien“ bzw. „Niveauflächen“. Leider ging diese Tradition aber im Laufe der Zeit wieder verloren.

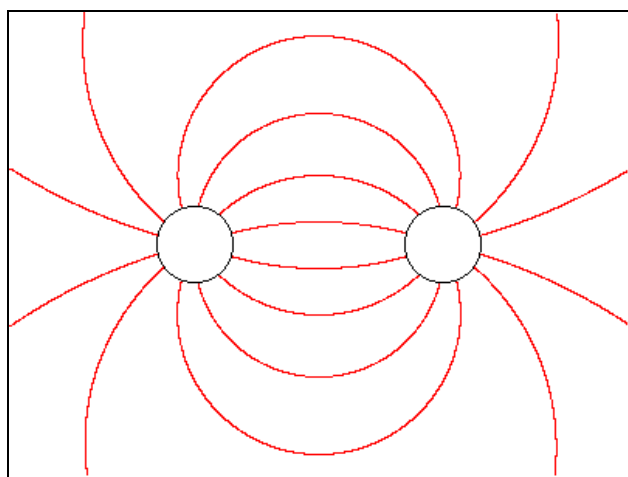


Abb. 1a. Das Feldlinienbild zweier entgegengesetzt geladener Kugeln

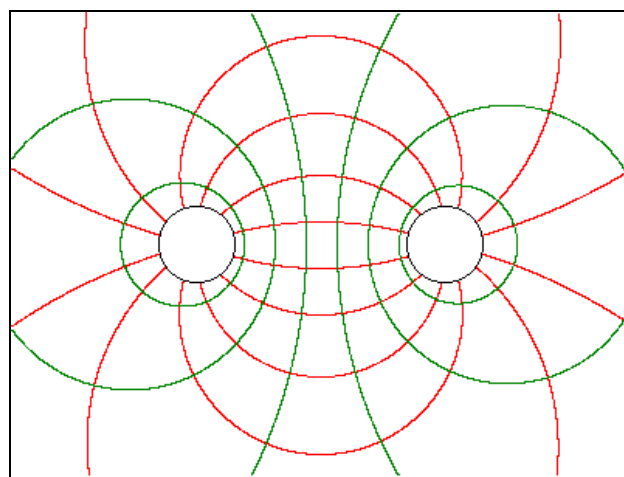


Abb. 1b. Feldlinien (rot) und Feldflächen (grün)

Um im folgenden die Vorzüge der Feldflächen zu demonstrieren, werden wir uns auf die Betrachtung von elektrischen Feldern beschränken. Aufgrund der Symmetrie der Maxwellgleichungen kann die Argumentation aber ganz analog auf magnetische Felder übertragen werden. Außerdem werden wir nur stationäre elektrische Felder untersuchen. Mit stationär ist gemeint: Die Feldstärke ändert sich nicht mit der Zeit, d. h. sie ist zeitlich konstant. Stationär ist also nicht dasselbe wie statisch. Unter einem elektrostatischen Feld versteht man ein Feld, das als Quellen nur ruhende elektrische Ladungen hat. Zu den stationären elektrischen Feldern gehören dagegen auch solche Felder, die durch eine magnetische Flussänderung zustande kommen, vorausgesetzt, die Zeitableitung der magnetischen Induktion ist zeitlich konstant. Dann ist auch das induzierte elektrische Feld an jedem Ort zeitlich konstant.

## Flussquellen

Man kann jedes stationäre elektrische Feld in zwei Anteile zerlegen, je nachdem, welche „Quellen“ das Feld hat. Mit „Quelle“ ist dabei ein anderes physikalisches System gemeint, mit dem das Feld unlösbar verbunden ist.

Die erste Art von Quellen, die „Flussquellen“, sind die Stellen, an denen die Divergenz der elektrischen Feldstärke von null verschieden ist. Wegen der dritten maxwellschen Gleichung ( $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ ) sind dies gleichzeitig die Stellen, an denen elektrische Ladung sitzt, also Stellen mit  $\rho \neq 0$ . Hierbei ist  $\rho$  die gesamte elektrische Ladungsdichte, d. h. die Summe aus freier und gebundener Ladung.

Elektrische Ladungen sind also die Flussquellen des elektrischen Feldes. Wie die dritte maxwellsche Gleichung zeigt, erkennt man die Flussquellen im Feldlinienbild daran, dass dort Feldlinien beginnen oder enden, Abb. 3a.

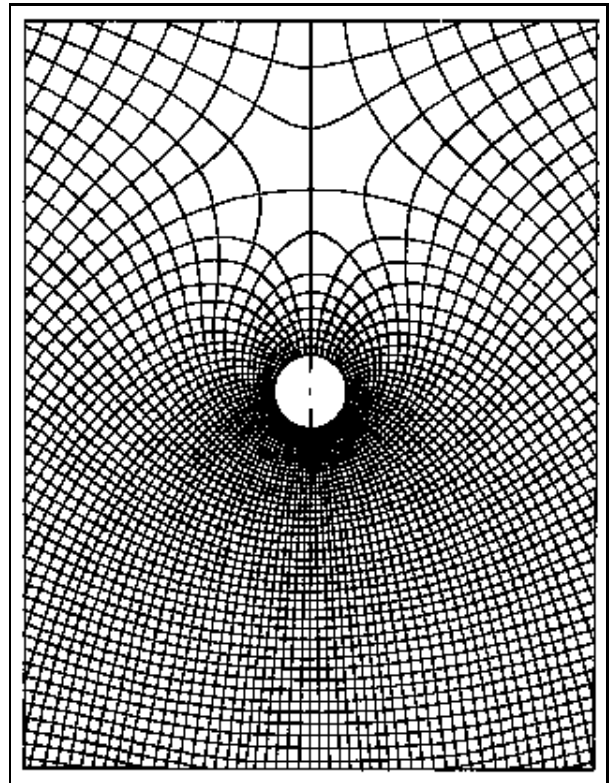


Abb. 2. Aus Maxwells „Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus“

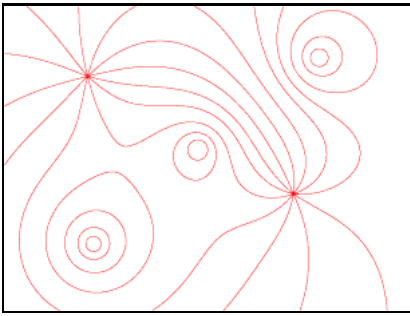


Abb. 3a. Feldlinienbild. Die Flussquellen sitzen dort, wo die Linien anfangen und enden.

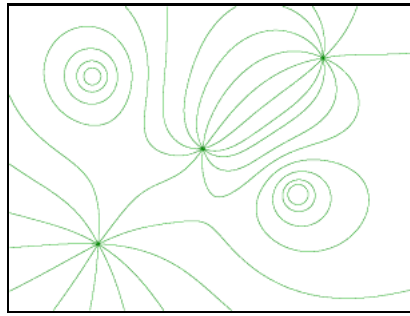


Abb. 3b. Feldflächenbild. Die Wirbelquellen sitzen dort, wo die Flächen anfangen und enden.

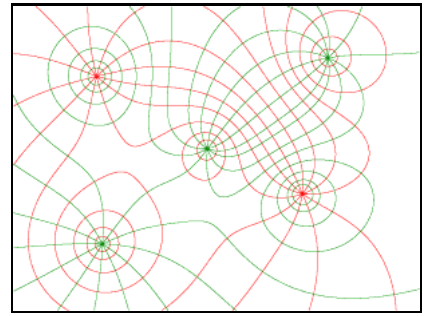


Abb. 3c. Linien und Flächen. Man erkennt 2 Fluss- und 3 Wirbelquellen.

## Wirbelquellen

Die zweite Art von Quellen, die „Wirbelquellen“, sind die Stellen, an denen die Rotation der elektrischen Feldstärke von null verschieden ist. Für die Wirbelquellen gilt die zweite maxwellsche Gleichung ( $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ), und daher sind die Wirbelquellen gleichzeitig die Stellen, an denen sich die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  zeitlich ändert.

Wo die Wirbelquellen sitzen, erkennt man am Feldlinienbild aber nur schlecht. Geschlossene Feldlinien sind zwar ein Hinweis, dass irgendwo innerhalb Wirbelquellen liegen müssen, den genauen Ort der Wirbelquellen und ihre räumliche Verteilung sieht man dem Bild aber nicht an. Abgesehen davon gibt es auch Anordnungen mit Wirbelquellen, bei denen keine geschlossenen Feldlinien auftreten. Wir werden im folgenden Abschnitt ein Beispiel dafür vorstellen.

Zeichnet man statt der Feldlinien die Feldflächen, sieht man im Feldflächenbild sehr deutlich, wo die Wirbelquellen sitzen. Die Wirbelquellen sitzen dort wo die Feldflächen enden, Abb. 3b. Dafür sieht man einem solchen Bild nicht so gut an, wo sich die Flussquellen befinden.

Am besten ist es daher, man zeichnet beide: Feldlinien und Feldflächen, Abb. 3c. Man sieht jetzt deutlich, dass im Bild zwei Fluss- und drei Wirbelquellen vorhanden sind.

## Ein Beispiel

Das Feld in Abbildung 4a ist kein elektrostatisches Feld. Wie kommt es zustande? Mit den bisher genannten Regeln kann man sich systematisch zum Ergebnis hinarbeiten. Da im Zentrum die Feldlinien beginnen, befindet sich dort eine Flussquelle. Zeichnet man jetzt zusätzlich die Feldflächen ein, Abb. 4b, erkennt man, dass im Zentrum des Bildes ebenfalls eine Wirbelquelle vorhanden ist.

Die Anordnung ist ein Beispiel für das Vorkommen von Wirbelquellen, ohne dass gleichzeitig geschlossene Feldlinien auftauchen.

Das elektrische Feld in der Abbildung entsteht aus der Überlagerung des Feldes einer Flussquelle und des Feldes einer Wirbelquelle, die sich am gleichen Ort befinden.

Die jeweiligen Feldlinienbilder für die Flussquelle, Abb. 5a, und die Wirbelquelle, Abb. 5b, sind einfach und jedem Physiker gut vertraut.

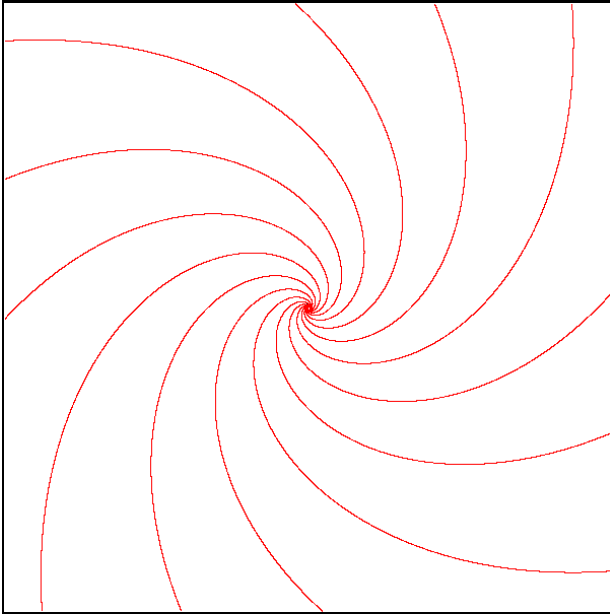


Abb. 4a. Wie kommt das Feld zustande?

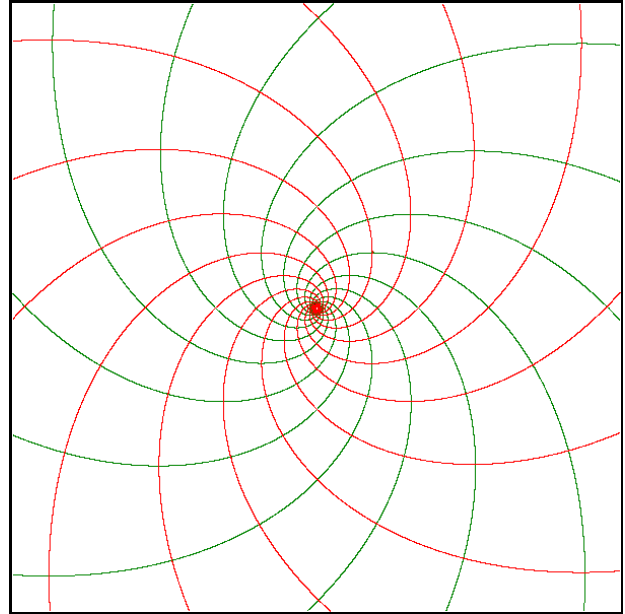


Abb. 4b. Linien und Flächen. In der Mitte befindet sich eine Fluss- und eine Wirbelquelle.

## Die Symmetrie zwischen Fluss- und Wirbelquellen

Zeichnet man in die Feldlinienbilder der Fluss- und Wirbelquelle zusätzlich die Feldflächen ein, Abb. 6a und 6b, bemerkt man sofort die Ähnlichkeit der beiden Bilder. Denn sie sind bis auf die Tatsache, dass die Linien und Flächen, d. h. rot und grün vertauscht sind, identisch. Dies deutet darauf hin, dass es zwischen den Flussquellen und den Wirbelquellen, bzw. den Feldlinien und den Feldflächen eine starke Symmetrie gibt.

Solange man zweidimensionale Abbildungen betrachtet, erscheinen die Feldflächen ebenfalls als Linien. Man kann dann die Farben der Feldlinien und Feldflächen in der Abbildung vertauschen. Auf diese Art kann man jedes Feldlinien- und Feldflächenbild auf zwei Arten interpretieren, wobei die Rolle der Fluss- und Wirbelquellen vertauscht wird.

Zwei weitere Interpretationsmöglichkeiten erhält man, wenn man das Feld als magnetisches Feld auffasst.

Die Symmetrie zwischen den Fluss- und Wirbelquellen ist die Grundlage einer weitgehenden Analogie innerhalb der Elektrodynamik. Sie soll an einem Beispiel erläutert werden:

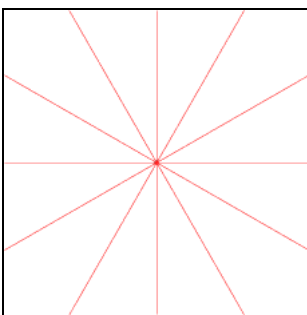


Abb. 5a. Feldlinienbild der Flussquelle

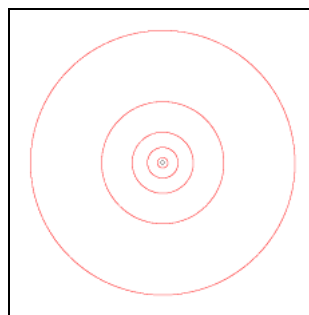


Abb. 5b. Feldlinienbild der Wirbelquelle

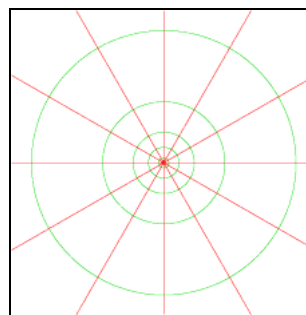


Abb. 6a. Linien und Flächen bei der Flussquelle

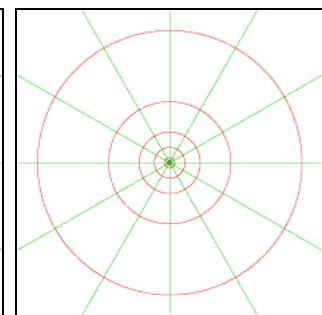


Abb. 6b. Linien und Flächen bei der Wirbelquelle

Die Abbildung 7 zeigt ein Feld, das im folgenden auf vier verschiedene Arten interpretiert werden soll. Zunächst zweimal als elektrisches Feld, dann zweimal als magnetisches Feld. Wir wollen jeweils die zugehörige Realisierung vorstellen.

Wir beginnen mit dem elektrischen Fall, die roten Linien seien zunächst wieder die Feldlinien.

In diesem Fall zeigt die Abbildung das Feld zweier elektrisch geladener Platten, also eine Art „Kondensator“, Abb. 8a. Auf den beiden Platten sitzen Flussquellen von gleichem Betrag, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Die roten Feldlinien beginnen und enden auf den Platten, d.h. auf den Flussquellen. Die grünen Feldflächen verlaufen senkrecht zu den Linien, sie sind in sich geschlossen.

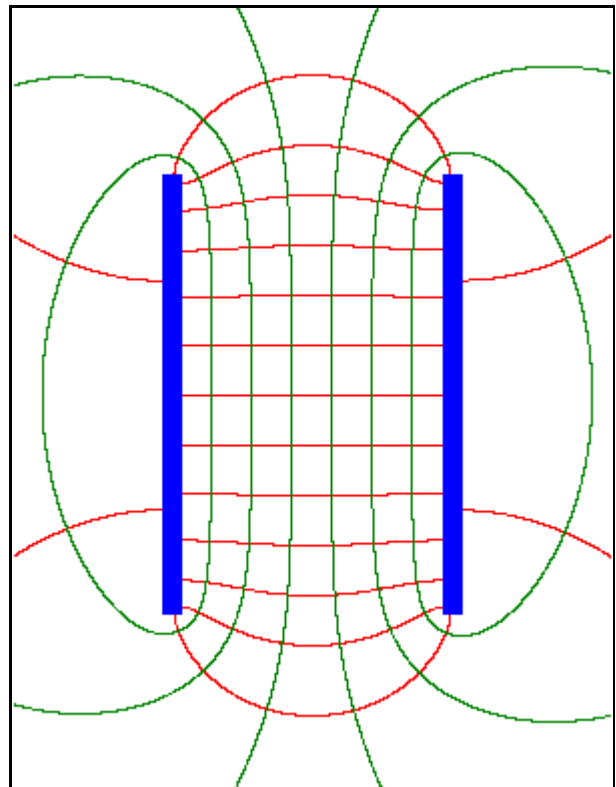


Bild 7. Das Bild läßt 4 verschiedene Interpretationen zu.

Vertauscht man die Feldlinien und die Feldflächen, werden aus den Flussquellen auf den Platten Wirbelquellen. Elektrische Wirbelquellen mit zeitlich konstantem Wert sind Stellen, an denen sich die magnetische Flussdichte  $B$  gleichmäßig mit der Zeit ändert, d. h. Stellen an denen  $\partial B/\partial t$  konstant ist. Zur Realisierung verwenden wir Spulen, die senkrecht zur Zeichenebene stehen, Abb. 8b. In diesen Spulen nimmt die Stromstärke linear zu, und damit auch der magnetische Fluss. Die Flussdichteänderung  $\dot{\Phi}$  ist konstant. In der einen Spule zeigt das Magnetfeld in die Zeichenebene hinein, in der anderen aus ihr heraus.

Wie sieht das ganze im magnetischen Fall aus?

Die Quellen seien zunächst wieder Flussquellen. Magnetische Flussquellen sitzen auf den Polen von Magneten. Die entgegengesetzt elektrisch geladenen Platten entsprechen daher zwei unterschiedlichen, flächigen Magnetpolen. Dargestellt ist daher z. B. das Feld zwischen den Polen eines Hufeisenmagneten, Abb. 8c. Das Feldbild sieht genauso aus, wie bei den elektrisch geladenen Platten. Die roten Feldlinien enden auf den magnetischen Flussquellen, die Feldflächen sind geschlossen.

Zum Abschluss wieder die Vertauschung von Linien und Flächen, diesmal für den magnetischen Fall. Die Quellen sind wieder Wirbelquellen. Dafür gibt es im magnetischen Fall aber eine einfachere Realisierung als im elektrischen Fall. Denn außer sich ändernden elektrischen Feldern sind auch elektrische Ströme Wirbelquellen des magnetischen Feldes. Die zugehörige Realisierung sind zwei flächige Leiter, durch die auf der einen Seite ein elektrischer Strom in die Zeichenebene hinein, und auf der anderen Seite herausfließt, Abb. 8d. Das induzierte magnetische Feld sieht genauso aus, wie das elektrische Feld der elektrischen Wirbelquellen. Es hat geschlossene Feldlinien, die Feldflächen beginnen und enden auf den Wirbelquellen.

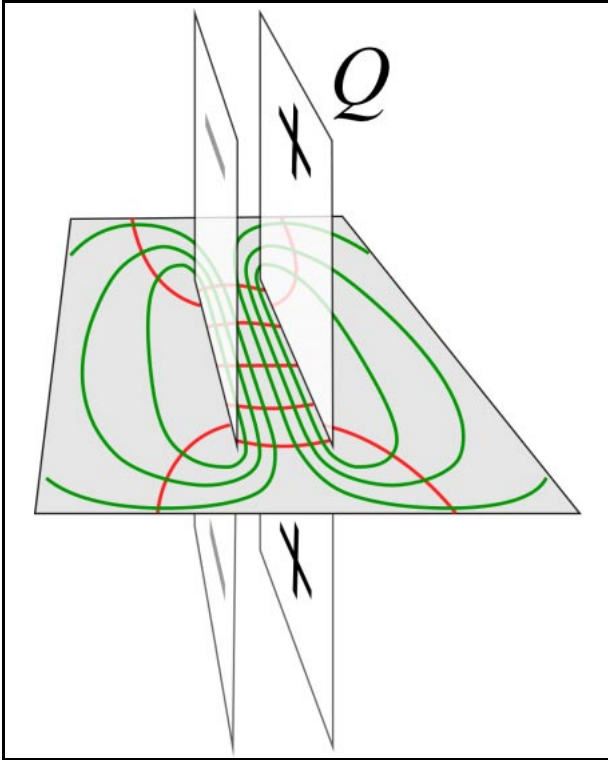


Abb. 8a. Zwei elektrisch geladene Platten (elektrisches Feld)

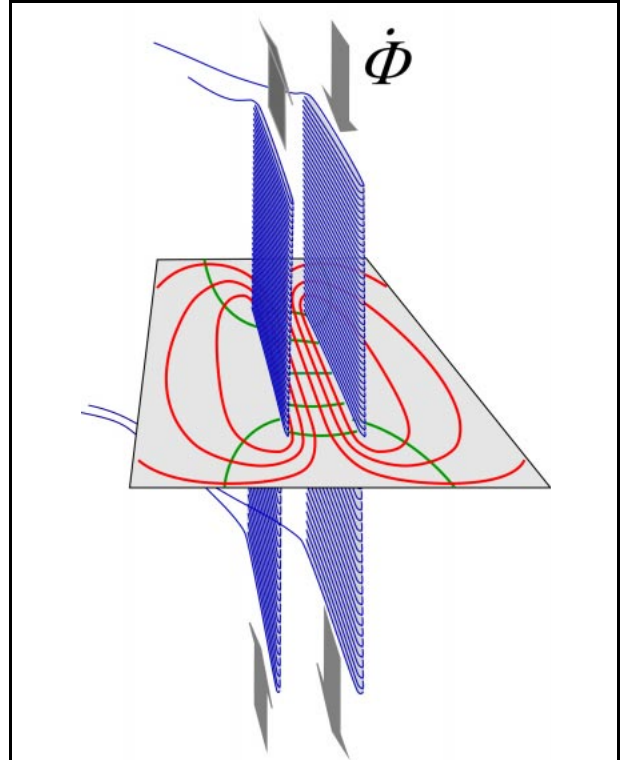


Abb. 8b. Zwei flache Spulen mit zeitlich sich änderndem magnetischem Fluss (elektrisches Feld)

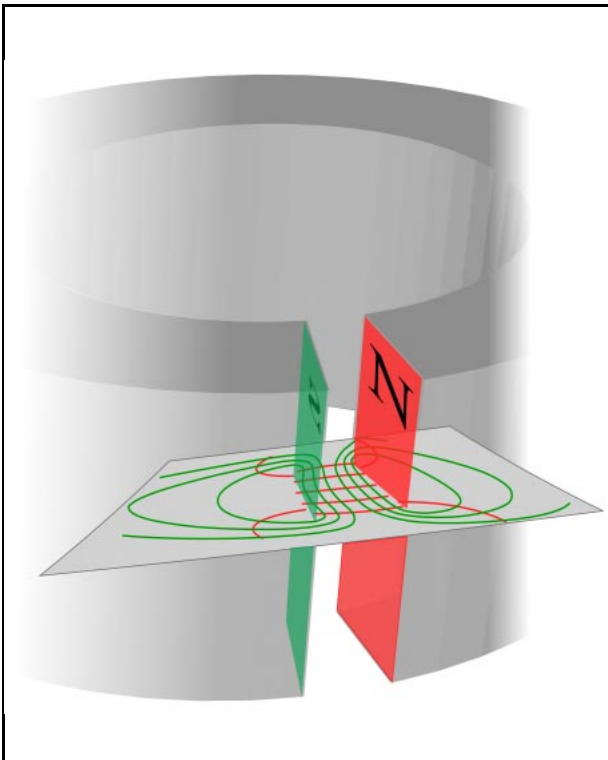


Abb. 8c. Zwei magnetisch geladene Platten (magnetisches Feld)

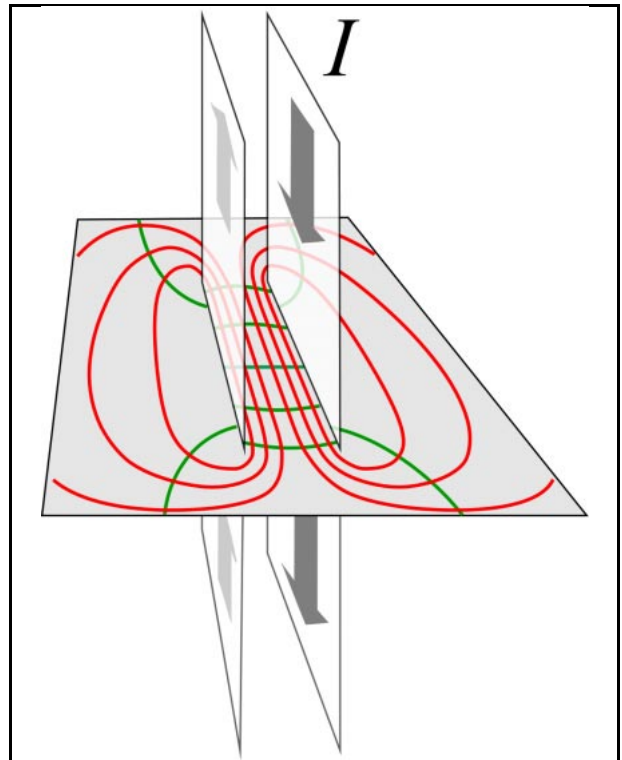


Abb. 8d. Zwei flächige elektrische Ströme (magnetisches Feld)

## Influenzerscheinungen in der Elektrodynamik

Interpretiert man Abbildung 9a als Bild eines elektrischen Feldes, und die roten Linien als Feldlinien, dann zeigt es einen Metallzylinder in einem zunächst homogenen elektrischen Feld. Auf der Oberfläche des Zylinders sind durch Influenz Flussquellen, also Ladungen, entstanden; die Feldflächen laufen tangential zur Zylinderoberfläche.

Die Realisierung im magnetischen Fall ist sehr ähnlich. Hier zeigt das Bild einen weichmagnetischen, also ideal paramagnetischen Zylinder, der in ein ursprünglich homogenes Magnetfeld gebracht wurde. Diesmal haben sich auf der Oberfläche des Zylinders Magnetpole, d. h. magnetische Flussquellen gebildet.

Und noch eine dritte Interpretation: Das Feld sei wieder ein magnetisches Feld, die Farben, d. h. die Fluss- und Wirbelquellen, werden aber vertauscht, Abb. 9b.

Da die Feldflächen auf der Zylinderoberfläche enden, müssen dort magnetische Wirbelquellen entstanden sein, d. h. elektrische Ströme. Bei dem Zylinder handelt es sich um einen Supraleiter (einen idealen Diamagneten), der in ein homogenes magnetisches Feld gebracht wurde. Die Feldlinien des Magnetfeldes laufen tangential zur Oberfläche des Diamagneten.

### Fazit

Die Einführung der Feldflächen hat zwei Vorteile. Zum einen wird die Ortsverteilung beider Quellensorten deutlich erkennbar. Zum anderen zeigt sich eine innere Symmetrie der Elektrodynamik, sowohl zwischen den Fluss- und Wirbelquellen, als auch zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern.

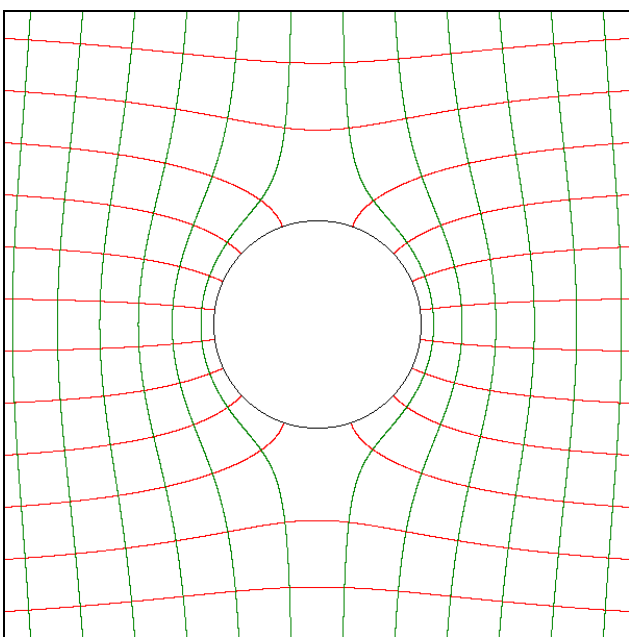


Abb. 9a. Metallzylinder im elektrischen oder weichmagnetischen Zylinder im magnetischen Feld

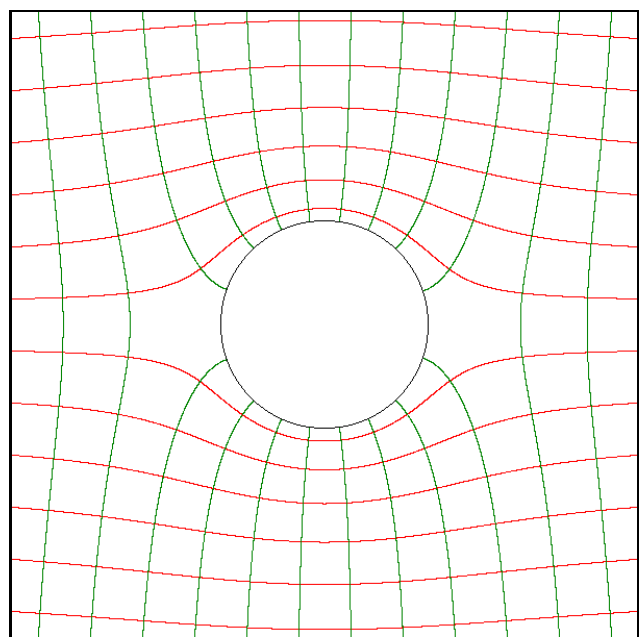


Abb. 9b. Supraleitender Zylinder im magnetischen Feld